RELACIONES DE RECURRENCIA

I. SUCESIONES

1. Para las siguientes sucesiones definidas de $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, hallar los primeros cinco elementos:

   a) $a_n = n^2 + 3$

   b) $a_n = 3^n - 1$

   c) $a_n = (-1)^n .n$

   d) $a_n = 2n + 3$

2. Para las siguientes sucesiones definidas en forma recursiva, hallar los tres elementos siguientes a los dados:

   a) $a_n = 2\, a_{n-1} + 3$ con $a_0 = 4$

   b) $a_{n+1} = 3\, a_n - a_{n-1} + 1$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 2$

   c) $a_{n+1} = a_n + n$ con $a_0 = 1$

   d) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 3$

3. Dados los siguientes elementos de sucesiones, indicar el siguiente y la expresión de un elemento genérico a_n:

a)	$a_0 = 4$	$a_1 = 6$	$a_2 = 8$	$a_3 = 10$	$a_4 = 12$	$a_5 =$....
b)	$a_0 = 1$	$a_1 = 2$	$a_2 = 4$	$a_3 = 7$	$a_4 = 11$	$a_5 =$....
c)	$a_0 = 0$	$a_1 = 1/4$	$a_2 = 2/5$	$a_3 = 1/2$	$a_4 = 4/7$	$a_5 =$....
d)	$a_0 = -2$	$a_1 = 3$	$a_2 = -4$	$a_3 = 5$	$a_4 = -6$	$a_5 =$....
e)	$a_0 = 1$	$a_1 = 3/4$	$a_2 = 5/9$	$a_3 = 7/16$	$a_4 = 9/25$	$a_5 =$....

4. Dada la siguiente sucesión definida en forma recursiva $a_n = 3\, a_{n-1}$ con $a_0=4$:

   a) Calcular los siguientes cuatro elementos y observar sus valores.

   b) Hallar una expresión no recursiva que defina la misma sucesión.

   c) Probar, por inducción, que la fórmula hallada es equivalente a la recursiva dada.

II. RELACIONES DE RECURRENCIA

5. Dadas las siguientes relaciones de recurrencia, clasificar según orden, grado, homogeneidad y tipo de coeficientes:

   a) $a_n = a_{n-1} + 3$

   b) $a_{n+1} = 3\, a_n - a_{n-1} + 1$

   c) $a_{n+1} = a_n + n^2$

   d) $a_{n+2} = a_n - 3\, a_{n-1} + 4\, a_{n-2}$

   e) $a_{n+1} - 3\, a_n = 0$

   f) $a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2$

   g) $a_{n+2} - 4\, a_{n+1} = 2\, a_n^{\,2}$

6. Explicar en qué consiste resolver una ecuación o relación de recurrencia. Indicar a qué se llama solución general y qué es una solución particular.

7. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 1 y probar, por inducción, que la fórmula hallada e equivalente a la dada:

a) $a_{n+1} = 3\, a_n$ con $a_0 = 5$
b) $2\, a_n - 5\, a_{n+1} = 0$ con $a_0 = 3$
c) $a_n - a_{n-1} = 0$ con $a_0 = 4$

8. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 2 y probar por inducción que la fórmula hallada es equivalente a la dada:

a) $a_n = 2\, a_{n-1} + 8\, a_{n-2}$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 10$
b) $a_{n+2} - 3\, a_{n+1} + 2\, a_n = 0$ con $a_0 = 7 \wedge a_1 = 8$
c) $a_{n+2} - 4\, a_{n+1} - 5\, a_n = 0$ con $a_0 = 4 \wedge a_1 = 2$

9. Armar una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 2 que tenga por solución a: $a_n = 2 \,.\, 4^n + 3^n$ e indicar las condiciones iniciales para que sea la única solución particular que verifique.

10. Clasificar la siguiente relación de recurrencia según orden, grado, homogeneidad y tipo de coeficiente: $a_{n+1} = 3\, a_n + 2$. Hallar la solución general y luego la particular para $a_0 = 1$.

11. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden 1 y probar por inducción que la fórmula hallada es equivalente a la dada:

a) $a_n + 2\, a_{n-1} = 3\, n^2$ con $a_0 = 4$
b) $a_n - 2\, a_{n-1} = 3^n$ con $a_0 = 5$
c) $a_n = 2\, a_{n-1} + 2\, n - 1$ con $a_1 = 2$
d) $a_n + 2\, a_{n-1} = 5 \,.\, 3^2$ con $a_0 = -1$

12. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 1:

a) $a_{n+1} - 5\, a_n = 12$ con $a_0 = -1$
b) $a_{n+1} - 2\, a_n = 2$ con $a_0 = 3$
c) $a_{n+1} - 2\, a_n = 2 \,.\, 3^n$ con $a_0 = 2$
d) $a_{n+1} = 2\, a_n + 3n - 1$ con $a_0 = 0$
e) $a_{n+1} - 4\, a_n = 4\, (1-n)\, 2^n$ con $a_0 = 3$

13. Resolver las siguientes relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 2:

a) $a_{n+2} + 3\, a_{n+1} + 2\, a_n = 3^n$ con $a_0 = 0 \wedge a_1 = 1$
b) $a_{n+2} + 4\, a_{n+1} + 4\, a_n = 7$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 2$
c) $a_{n+2} - 4\, a_{n+1} + 4\, a_n = 4 \,.\, 3^n$ con $a_0 = 4 \wedge a_1 = 14$
d) $a_{n+2} - 6\, a_{n+1} + 9\, a_n = 5 \,.\, 2^n$ con $a_0 = 5 \wedge a_1 = 13$
e) $a_{n+2} - 4\, a_{n+1} + 4\, a_n = 4^{n+1}$ con $a_0 = 1 \wedge a_1 = 10$
f) $a_{n+2} - 2\, a_{n+1} - 3\, a_n = 24 \,.\, 3^n + 12 \,.\, 5^n$ con $a_0 = 0 \wedge a_1 = 1$

Unidad 6	Relaciones de Recurrencia	Mat. Discreta 2020

I) SUCESIONES

① Para las sig. sucesiones definidas de $\mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathbb{R}$, hallar los primeros cinco elementos:

a) $a_n = n^2+3$

$a_0 = 3$ $\quad a_1 = 4$ $\quad a_2 = 7$ $\quad a_3 = 12$ $\quad a_4 = 19$

b) $a_n = 3^n - 1$

$a_0 = 0$ $\quad a_1 = 2$ $\quad a_2 = 8$ $\quad a_3 = 26$ $\quad a_4 = 80$

c) $a_n = (-1)^n \cdot n$

$a_0 = 0$ $\quad a_1 = -1$ $\quad a_2 = 2$ $\quad a_3 = -3$ $\quad a_4 = 4$

d) $a_n = 2n+3$

$a_0 = 3$ $\quad a_1 = 5$ $\quad a_2 = 7$ $\quad a_3 = 9$ $\quad a_4 = 11$

② Para las sig. sucesiones definidas en forma recursiva, hallar los tres elementos sig. a los dados:

a) $a_n = 2a_{n-1} + 3$ con $a_0 = 4$

$a_1 = 2\overset{4}{a_0} + 3 = \boxed{11 = a_1}$, $\quad a_2 = 2\overset{11}{a_1} + 3 = \boxed{25 = a_2}$ $\quad a_3 = 2\overset{25}{a_2} + 3 = \boxed{53 = a_3}$

b) $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} + 1$ con $a_0 = 1$ $\wedge$ $a_1 = 2$

$a_2 = 3a_1 - a_0 + 1 = \boxed{6 = a_2}$ $\quad a_3 = 3a_2 - a_1 + 1 = \boxed{17 = a_3}$ $\quad \boxed{a_4 = 46}$

c) $a_{n+1} = a_n + n$ con $a_0 = 1$ $\quad \to a_n = a_{n-1} + n - 1$

$a_1 = a_0 + 1 - 1 = \boxed{1 = a_1}$ $\quad \boxed{a_2 = 2}$ $\quad \boxed{a_3 = 4}$

d) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ con $a_0 = 1$ $\wedge$ $a_1 = 3$ $\quad \to a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

$a_2 = a_0 + a_1 = \boxed{4 = a_2}$, $\quad \boxed{a_3 = 7}$ $\quad \boxed{a_4 = 11}$

③ Dados los siguientes elementos de sucesiones, indicar el siguiente y la expresión de un elemento genérico a_n:

a) $a_0 = 4$; $a_1 = 6$; $a_2 = 8$; $a_3 = 10$; $a_4 = 12$

$a_5 = 14$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = 4 + 2n}$

b) $a_0 = 1$; $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 7$; $a_4 = 11$

$a_5 = 16$; $\boxed{a_n = a_{n-1} + n}$

c) $a_0 = 0$; $a_1 = \frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $a_4 = \frac{4}{7}$

$a_5 = \frac{5}{8}$; $\boxed{a_n = \frac{n}{n+3}}$

d) $a_0 = -2$; $a_1 = 3$; $a_2 = -4$; $a_3 = 5$; $a_4 = -6$

$a_5 = 7$; $\boxed{a_n = (-1)^{n+1}\ n+2}$

(ver ejercicio 1c)

e) $a_0 = 1$; $a_1 = \frac{3}{4}$; $a_2 = \frac{5}{9}$; $a_3 = \frac{7}{16}$; $a_4 = \frac{9}{25}$

$a_5 = \frac{11}{36}$ (impares) ; $\boxed{a_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2}}$

④ Dada la sig. sucesión definida en forma recursiva: $a_n = 3\,a_{n-1}$ con $a_0 = 4$

a) Calcular los sig. cuatro elementos y observar sus valores

$a_1 = 3a_0 = 3.4$, $a_2 = 3a_1 = 3(3.4) = 3^2.4$; $a_3 = 3(3^2\,4) = 3^3.4$; $a_4 = 3^4\,4$

b) Hallar una expresión no recursiva que define la misma sucesión

$\boxed{a_n = 3^n.4}$

c) Probar, por Inducción, que la fórmula hallada es equivalente a la recursiva dada.

Paso base: $n=0$: $a_0 = 3^0.4 = 4$ ✓ se cumple

Paso Inductivo: $HI)^{n=h}$ $a_h = 3^h.4$

$TI)^{n=h+1}$ $a_{h+1} = 3^{h+1}.4$

Dem.: $a_{h+1} = 3\,a_h \overset{HI}{=} 3(3^h.4) = 3^{h+1}.4$ ✓

U.6 2020

II Relaciones de Recurrencia

(5) Dados las sig. relaciones de recurrencia, clasificar según orden, grado, homogeneidad y tipo de coeficientes:

	Orden	Grado	homogénea?	tipo de coef.
a) $a_m = 2a_{m-1} + 3$	1	1	No	Constante
b) $a_{m+1} = 3a_m - a_{n-1} + 1$	2	1	No	Const
c) $a_{m+1} = a_n + n^2$	1	1 (el exp. está en n)	No	const
d) $a_{n+2} = a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$	a_{n-2} a a_{n+2} 4	1	Sí	Const
e) $a_{n+1} - 3a_n = 0$	1	1	Sí	Const.
f) $a_{n+2} = n\,a_{n+1} + 2$	1	1	No	Variable
g) $a_{m+2} - 4a_{n+1} = 4a_n^2$	2	2 (el exp. está en a_m)	Sí	Const.

(6) Explicar en qué consiste resolver una ecuación o relación de recurrencia. Indicar a qué se llama solución general y qué es una solución particular.

En una ecuación o relación de recurrencia se necesita conocer valores de resultados de términos anteriores. Resolver este tipo de ecuación significa encontrar una expresión de a_n que no necesite valores anteriores (que no sea recursiva) y que satisfaga la relación

Recursiva $\rightarrow a_n = 2a_{n-1}$, $a_1 = 4$
No recursiva $\rightarrow a_n = 2^{n+1}$

Solución general: Es una solución que contiene una o más constantes arbitrarias y responde a una familia de soluciones

Solución particular: Es un caso particular de la solución general en donde las constantes dejan de ser arbitrarias y toman un valor particular, según los valores iniciales dados.

7) Resolver las sig. relaciones de recurrencia lineales homogéneas de orden 1 y probar por inducción que la fórmula hallada es equivalente a la dada:

$\underbrace{a_n = k a_1}_{}$
$a_n = k . a_0^n$

(ver ej. 4 a) y video teórico partes)

a) $a_{n+1} = 3a_n$, $a_0 = 5$

$a_n = 3a_{n-1} \Rightarrow \boxed{a_n = 3^n 5}$

Paso base: $n=0$: $a_0 = 3^0 5 = 5 = a_0$ ✓

Paso inductivo: HI) $a_h = 3^h 5$

TI) $a_{h+1} = 3^{h+1} 5$

Dem: $a_{h+1} = 3a_h \overset{HI}{=} 3(3^h 5) = 3^{h+1} 5$ ✓

b) $2a_n - 5a_{n+1} = 0$, $a_0 = 3$ → $5a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n$

$2a_{n-1} - 5a_n = 0 \Rightarrow a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} \Rightarrow \boxed{a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n 3}$

Paso base: $n=0$: $a_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^0 3 = 3$ ✓

Paso inductivo: HI) $a_h = \left(\frac{2}{5}\right)^h 3$

TI) $a_{h+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{h+1} 3$

Dem: $a_{h+1} = \frac{2}{5}a_h \overset{HI}{=} \frac{2}{5}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^h . 3\right] = \left(\frac{2}{5}\right)^{h+1} . 3$ ✓

c) $a_n - a_{n-1} = 0$, $a_0 = 4$ → $a_{h+1} = a_h$

$a_n = a_{n-1} \rightarrow \boxed{a_n = 4}$

Paso base: $a_0 = 4$ ✓

Paso inductivo: HI) $a_h = 4$

TI) $a_{h+1} = 4$

Dem: $a_{h+1} = a_h = 4$ ✓

(8) Resolver las sig. rel. de recurrencia lineales homogéneas de orden 2 y probar por inducción que la fórmula hallada es equiv. a la dada:

a) $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$, $a_0 = 1 \wedge a_1 = 10$

$a_n - 2a_{n-1} - 8a_{n-2} = 0$

↳ ec. característica: $r^2 - 2r - 8 = 0 \Rightarrow r_1 = 4 \quad r_2 = -2$

- $r_1 \neq r_2$: propongo sol. general: $\boxed{a_{n_g} = k_1 4^n + k_2 (-2)^n}$ general
- $a_0 = k_1 4^0 + k_2 (-2)^0 = 1 = k_1 + k_2$
  $a_1 = k_1 4^1 + k_2 (-2)^1 = 10 = 4k_1 - 2k_2$ $\Big\}$ $k_1 = 2 \quad k_2 = -1$

Sol. part: $\boxed{a_n = 2 \cdot 4^n - (-2)^n}$

Paso base: $n=0$: $a_0 = 2 \cdot 4^0 - (-2)^0 = 1$ ✓
$n=1$: $a_1 = 2 \cdot 4^1 - (-2)^1 = 10$ ✓

$a_{n+1} = 2a_n + 8a_{n-1}$ (I) sucesión dada

+1

Paso inductivo: HI) $a_n = 2 \cdot 4^n - (-2)^n$
$a_{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1} - (-2)^{n-1}$

+1) $a_{n+1} = 2 \cdot 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$

Dem: $a_{n+1} \overset{(I)}{=} 2a_n + 8a_{n-1} \overset{HI}{=} 2\left(2 \cdot 4^n - (-2)^n\right) + 8\left(2 \cdot 4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right) =$

$= \underbrace{4 \cdot 4^n} - 2(-2)^n + \overset{4^2}{16} \cdot 4^{n-1} - 8(-2)^{n-1} =$

$= 4^{n+1} - 2(-2)^n + 4^2 \cdot 4^{n-1} - 2^3(-2)^{n-1} =$

$= \underbrace{4^{n+1} + 4^{n+1}} - \left[2(-2)^n + 8(-2)^{n-1}\right] =$

$= 2 \cdot 4^{n+1} - \left[2(-2)^n + (-4)(-2)(-2)^{n-1}\right] =$

$= 2 \cdot 4^{n+1} - \left[2(-2)^n - 4(-2)^n\right] =$

$= 2 \cdot 4^{n+1} - (-2)(-2)^n = 2 \cdot 4^{n+1} - (-2)^{n+1}$ ✓

b) $a_{m+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad , \; a_0 = 7 \;\wedge\; a_1 = 8$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = 1$

$\boxed{a_{m_G} = k_1 2^m + k_2}$

$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

$a_0 = 7 = k_1 2^0 + k_2 \longrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 7 \\ 2k_1 + k_2 = 8 \end{cases} \longrightarrow k_1 = 1 \quad k_2 = 6$

$a_1 = 8 = k_1 2 + k_2$

$\boxed{a_n = 2^m + 6}$

Paso base: $a_0 = 2^0 + 6 = 7$ ✓ $\quad a_1 = 2^1 + 6 = 8$ ✓

Paso inductivo: HI) $a_h = 2^h + 6 \Rightarrow a_{h-1} = 2^{h-1} + 6$

TI) $a_{h+1} = 2^{h+1} + 6$

Dem: $a_{h+1} = 3a_h - 2a_{h-1} \overset{HI}{=} 3(2^h + 6) - 2(2^{h-1} + 6) =$

$= 3 \cdot 2^h + 18 - 2^h - 12 = 2 \cdot 2^h + 6 = \boxed{2^{h+1} + 6}$ ✓

c) $a_{m+2} - 4a_{n+1} - 5a_n = 0 \quad , \; a_0 = 4 \;\wedge\; a_1 = 2$

$r^2 - 4r - 5 = 0 \rightarrow r_1 = 5 \quad r_2 = -1$

$\boxed{a_{n_G} = k_1 5^n + k_2 (-1)^m}$

$a_{h+1} - 4a_h - 5a_{h-1} = 0$

$a_{h+1} = 4a_h + 5a_{h-1}$

$a_0 = 4 = k_1 5^0 + k_2 (-1)^0 \longrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 4 \\ 5k_1 - k_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow k_1 = 1, \; k_2 = 3$

$a_1 = 2 = k_1 5^1 + k_2 (-1)^1$

$\boxed{a_n = 5^m + 3(-1)^n}$

Paso base: $m = 0 \rightarrow a_0 = 5^0 + 3(-1)^0 = 4$ ✓

$m = 1 \rightarrow a_1 = 5^1 + 3(-1) = 2$ ✓

Paso inductivo: HI) $a_h = 5^h + 3(-1)^h$ y $a_{h-1} = 5^{h-1} + 3(-1)^{h-1}$

TI) $a_{h+1} = 5^{h+1} + 3(-1)^{h+1}$

Dem: $a_{h+1} = 4a_h + 5a_{h-1} \overset{HI}{=} 4(5^h + 3(-1)^h) + 5(5^{h-1} + 3(-1)^{h-1}) =$

$= 4 \cdot 5^h + 12(-1)^h + 5^h + 15(-1)^{h-1} =$

$= 5 \cdot 5^h + 12(-1)^h + 15\overbrace{(-1)(-1)}^{(-1)^2}(-1)^{h-1} =$

$= 5^{h+1} + (-12)(-1)(-1)^h + 15(-1)^{h+1} =$

$= 5^{h+1} - 12(-1)^{h+1} + 15(-1)^{h+1} =$

$= \boxed{5^{h+1} + 3(-1)^{h+1}}$ ✓

U6 2020

(9) Armar una ecuación de recurrencia lineal homogénea de orden 2 que tenga por solución a: $a_n = 2.4^n + 3^n$ e indicar las condiciones iniciales para que sea la única solución particular que verifique.

$a_n = 2 \times 4^n + 3^n \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 3$ $\quad k_1 = 2 \;, k_2 = 1$

$(x-4)(x-3) = x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0}$

$a_0 = 2 \times 4^0 + 3^0 = 3 \longrightarrow \boxed{a_0 = 3}$ $\boxed{a_1 = 11}$

$a_1 = 2 \times 4^1 + 3^1 = 11$

---

(10) Clasificar la sig. relación de recurrencia según orden, grado, homogeneidad y tipo de coeficiente:

$$a_{n+1} = 3a_n + 2$$

Orden 1, grado 1, No homogénea y coef. constante.

Hallar la sol. general y luego la particular para $a_0 = 1$.

$a_{n+1} - 3a_n = 2$

Sol. de la homogénea asociada:

$a_n - 3a_{n-1} = 0 \longrightarrow \boxed{a_{n_H} = k_1 3^n}$

Sol. part.

$a_{n_p} = k_2 \Longrightarrow a_{(n-1)p} = k_2$

$a_{n_p} - 3a_{n-1_p} = k_2 - 3k_2 = 2 \Rightarrow \boxed{k_2 = -1} \rightarrow \boxed{a_{n_p} = -1}$

$$a_{n_G} = a_{n_H} + a_{n_p}$$

$$\boxed{a_{n_G} = k_1 3^n - 1}$$

$a_0 = 1 = k_1 3^0 - 1 = k_1 - 1 \Rightarrow k_1 = 2$

$$\boxed{a_n = 2.3^n - 1}$$

(11) Resolver las sig. relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden 1 y probar por inducción que la fórmula hallada es equivalente a la dada:

a) $a_n + 2a_{n-1} = 3n^2 \quad , \quad a_0 = 4$

(I) Resuelvo homogénea asociada: $a_n + 2a_{n-1} = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n_H} = (-2)^n k}$

(II) Propongo sol. particular: $a_{n_P} = k_2 n^2 + k_1 n + k_0$

$$a_n + 2a_{n-1} = 3n^2$$

$$k_2 n^2 + k_1 n + k_0 + 2(k_2 \underbrace{(n-1)^2}_{n^2-2n+1} + k_1(n-1) + k_0) = 3n^2$$

$$k_2 n^2 + k_1 n + k_0 + 2k_2 n^2 - 4k_2 n + 2k_2 + 2k_1 n - 2k_1 + 2k_0 = 3n^2$$

$$n^2(k_2 + 2k_2) + n(k_1 - 4k_2 + 2k_1) + (k_0 + 2k_2 - 2k_1 + 2k_0) = 3n^2$$

$$n^2 \underbrace{3k_2}_{3} + n(\underbrace{3k_1 - 4k_2}_{0}) + (\underbrace{2k_2 - 2k_1 + 3k_0}_{0}) = 3n^2$$

$k_2 = 1 \qquad k_1 = \frac{4}{3} \qquad k_0 = \frac{2}{9} \qquad \boxed{a_{n_P} = n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{2}{9}}$

$$\boxed{a_{n_G} = a_{n_H} + a_{n_P} = k(-2)^n + n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{2}{9}}$$

$$a_0 = 4 = k(-2)^0 + 0^2 + \frac{4}{3}0 + \frac{2}{9} = k + \frac{2}{9} = 4 \Rightarrow k = \frac{34}{9}$$

$$\boxed{a_n = \frac{34}{9}(-2)^n + n^2 + \frac{4}{3}n + \frac{2}{9}}$$

- Paso Base: $n = 0$: $a_0 = \frac{34}{9} + \frac{2}{9} = 4$ ✓
- Paso inductivo: H.I) $a_h = \frac{34}{9}(-2)^h + h^2 + \frac{4}{3}h + \frac{2}{9}$

T.I) $\boxed{a_{h+1} = \frac{34}{9}(-2)^{h+1} + (h+1)^2 + \frac{4}{3}(h+1) + \frac{2}{9}}$

$a_{h+1} = -2a_h + 3(h+1)^2$

dato enunciado

Dem: $a_{h+1} = -2a_h + 3(h+1)^2 \overset{H.I}{=} -2\left(\frac{34}{9}(-2)^h + h^2 + \frac{4}{3}h + \frac{2}{9}\right) + 3(h+1)^2 =$

$$= \frac{34}{9}(-2)^{h+1} - 2h^2 - \frac{8}{3}h - \frac{4}{9} + 3(h+1)^2 =$$

$$= \frac{34}{9}(-2)^{h+1} + (h+1)^2 + 2(h+1)^2 - 2h^2 - \frac{8}{3}h - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{34}{9}(-2)^{h+1} + (h+1)^2 + \cancel{2h^2} + 4h + 2 - \cancel{2h^2} - \frac{8}{3}h - \frac{6}{9} + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{34}{9}(-2)^{h+1} + (h+1)^2 + \frac{4}{3}h + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} =$$

$$= \boxed{\frac{34}{9}(-2)^{h+1} + (h+1)^2 + \frac{4}{3}(h+1) + \frac{2}{9}}$$ ✓

6 2020

b) $a_n - 2a_{n-1} = 3^n$ con $a_0 = 5$ $\xrightarrow{n=h+1}$ $a_{h+1} = 2a_h + 3^{h+1}$

- Homogénea: $a_n = 2a_{n-1} \Rightarrow \boxed{a_{n_H} = 2^n k}$
- particular: $a_{n_p} = k_1 3^n$

$a_n - 2a_{n-1} = 3^n$

$k_1 3^n - 2k_1 3^{n-1} = 1.3^n = k_1 3^n - \frac{2}{3} k_1 3^n = 3^n \underbrace{k_1 \frac{1}{3}}_{1} \Rightarrow k_1 = 3$

$a_{n_p} = 3.3^n = 3^{n+1}$

$a_{n_G} = a_{n_p} + a_{n_H} \Rightarrow \boxed{a_n = 3^{n+1} + k2^n}$

$a_0 = 5 = 3 + k \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 3^{n+1} + 2^{n+1}}$

Paso Base: $n=0 \Rightarrow a_0 = 3^{0+1} + 2^{0+1} = 5$ ✓

Paso Inductivo: H.I) $a_h = 3^{h+1} + 2^{h+1}$

T.I) $a_{h+1} = 3^{h+2} + 2^{h+2}$

Dem: $a_{h+1} \overset{\text{enunciado}}{=} 2a_h + 3^{h+1} \overset{H.I}{=} 2(3^{h+1} + 2^{h+1}) + 3^{h+1} =$

$= 2.3^{h+1} + 2.2^{h+1} + 3^{h+1} =$

$= 3.3^{h+1} + 2^{h+2} = \underline{3^{h+2} + 2^{h+2}}$ es la tesis ✓

c) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $\qquad a_1 = 2$

- Homogénea: $a_n = a_{n-1} \Rightarrow a_{n_H} = k.1^n \Rightarrow \boxed{a_{n_H} = k}$

- Particular: $a_{n_p} = k_1 n^2 + k_2 n$ $\qquad k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

usé n^2 pues con un grado menos tenía un sist. incompatible

$$a_n - a_{n-1} = 2n - 1$$

$$k_1 n^2 + k_2 n - \left(k_1(n-1)^2 + k_2(n-1)\right) = 2n - 1$$

$$k_1 n^2 + k_2 n - \left(k_1(n^2 - 2n + 1) + k_2 n - k_2\right) = 2n - 1$$

$$\cancel{k_1 n^2} + \cancel{k_2 n} - \cancel{k_1 n^2} + 2k_1 n - k_1 - \cancel{k_2 n} + k_2 = 2n - 1$$

$$\underbrace{2k_1 n + (-k_1 + k_2) = 2n - 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2k_1 = 2 \\ -k_1 + k_2 = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{a_{n_p} = n^2}$$

$$a_{n_{gral}} = a_{n_H} + a_{n_p} \Rightarrow \boxed{a_{n_{gral}} = k + n^2}$$

$$a_1 = 2 = k + 1^2 \Rightarrow k = 1 \Longrightarrow \boxed{a_n = n^2 + 1}$$

- $a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \xrightarrow{n=h+1} a_{h+1} = a_h + 2(h+1) - 1 = a_h + 2h + 1$
- Paso base: $n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 1 = 2$ ✓
- Paso inductivo: H.I) $a_h = h^2 + 1$

  T.I) $a_{h+1} = (h+1)^2 + 1 = h^2 + 2h + 2$

Dem: $\boxed{a_{h+1}} = a_h + 2h + 1 \overset{HI}{=} h^2 + 1 + 2h + 1 =$

$= \boxed{h^2 + 2h + 2}$ ✓

U.6

d) $a_n + 2a_{n-1} = 5.3^n \qquad a_0 = -1$

$\xrightarrow{n=h+1} a_{h+1} = -2a_h + 5.3^{h+1}$

- Homogenea: $a_n = -2a_{n-1} \Longrightarrow \boxed{a_{n_H} = (-2)^n . k}$

$k, k_2 \in \mathbb{R}$

- Particular: $a_n = k_2 . 3^n$

$a_n + 2a_{n-1} = 5.3^n$

$k_2 3^n + 2(k_2 3^{n-1}) = 5.3^n$

$k_2 3^n + \frac{2}{3} k_2 3^n = 5.3^n$

$3^n (k_2 + \frac{2}{3}k_2) = 5.3^n \Longrightarrow \frac{5}{3}k_2 = 5 \Rightarrow \boxed{k_2 = 3}$

$a_{n_P} = 3.3^n = \boxed{3^{n+1} = a_{nP}}$

$\boxed{a_{n_G} = (-2)^n k + 3^{n+1}} \qquad a_{nG} = a_{nH} + a_{nP}$

$a_0 = -1 = (-2)^0 k + 3^{0+1} = k + 3 = -1 \Longrightarrow \boxed{k = -4}$

$a_n = \underbrace{-4}_{(-2)2}(-2)^n + 3^{n+1}$

$\equiv \boxed{a_n = 2(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

Paso base: $n=0 \Rightarrow a_0 = 2(-2)^{0+1} + 3^{0+1} = -4+3 = -1$ ✓

Paso inductivo: H1) $a_h = 2(-2)^{h+1} + 3^{h+1}$

dato enunciado

T1) $a_{h+1} = 2(-2)^{h+2} + 3^{h+2}$

Dem: $\boxed{a_{h+1}} = -2a_h + 5.3^{h+1} \overset{HI}{=} -2(2(-2)^{h+1} + 3^{h+1}) + 5.3^{h+1} =$

$= -2.2(-2)^{h+1} - 2.3^{h+1} + 5.3^{h+1} =$

$= 2(-2)^{h+2} + 3.3^{h+1} = \boxed{2(-2)^{h+2} + 3^{h+2}}$ ✓

(12) Resolver las sig. relaciones de recurrencia lineales no homogéneas de orden 1:

a) $a_{n+1} - 5a_n = 12$, $a_0 = -1$

H • Homogénea : $a_{n+1} = 5a_n \Rightarrow a_n = 5a_{n-1} \Rightarrow \boxed{a_{nH} = 5^n k}$

P • Particular : $a_n = k_2 \Rightarrow a_{n+1} = k_2$

$a_{n+1} - 5a_n = 12$

$k_2 - 5k_2 = 12 \Rightarrow k_2 = -3 \Rightarrow \boxed{a_{nP} = -3}$

G • $a_{nG} = a_{nH} + a_{nP} \Rightarrow \boxed{a_{nG} = k\,5^n - 3}$

V.I Valor inicial • $a_0 = -1 = k5^0 - 3 = k - 3 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2 . 5^k - 3}$ ✓

b) $a_{n+1} - 2a_n = 2$ $a_0 = 3$

• H : $a_{n+1} = 2a_n \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} \Rightarrow \boxed{a_{nH} = 2^n k}$

• P : $a_{nP} = k_2 \Rightarrow a_{n+1} = k_2$

$a_{n+1} - 2a_n = 2$

$k_2 - 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = -2 \Rightarrow \boxed{a_{nP} = -2}$

• G : $\boxed{a_{nG} = k\,2^n - 2}$

• V.I : $a_0 = 3 = k2^0 - 2 = k - 2 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \boxed{a_n = 5 . 2^n - 2}$ ✓

c) $a_{n+1} - 2a_n = 2 . 3^n$ $a_0 = 2$

• H : $a_{n+1} = 2a_n$ (igual que en b) $\Rightarrow \boxed{a_{nH} = 2^n k}$

• P : $a_n = k_2 3^n \Rightarrow a_{n+1} = k_2 3^{n+1} = 3k_2 3^n$

$\rightarrow 3k_2 3^n - 2k_2 3^n = 2 . 3^n$

$k_2 3^n = 2 . 3^n \Rightarrow k_2 = 2 \rightarrow \boxed{a_{nP} = 2 . 3^n}$

• G : $\boxed{a_{nG} = k\,2^n + 2 . 3^n}$

• VI : $a_0 = 2 = k\,2^0 + 2 . 3^0 = k + 2 \Rightarrow k = 0$

$$\boxed{a_n = 2 . 3^n}$$ ✓

U.6 2020

d) $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 1 \qquad a_0 = 0$

- H (como b y c) : $\boxed{a_{n_H} = k_1 2^n}$
- P : $\boxed{a_{n_P} = k_2 n + k_3}$

$a_{n+1} - 2a_n = 3n - 1$

$k_2(n+1) + k_3 - 2(k_2 n + k_3) = 3n - 1$

$k_2 n + k_2 + k_3 - 2k_2 n - 2k_3 = 3n - 1$

$n(\underbrace{k_2 - 2k_2}_{3}) + (\underbrace{k_2 + k_3 - 2k_3}_{-1}) = 3n - 1$

$-1k_2 = 3 \Rightarrow \boxed{k_2 = -3}$

$k_2 - k_3 = -1 \Rightarrow \boxed{k_3 = -2}$

$\boxed{a_{n_P} = -3n - 2}$

- G : $\boxed{a_{n_G} = k_1 2^n - 3n - 2}$
- VI : $a_0 = 0 = k_1 2^0 - 3\times 0 - 2 = k_1 - 2 \Rightarrow k_1 = 2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2^{n+1} - 3n - 2}$ ✓

e) $a_{n+1} - 4a_n = \overset{4.2^n - 4n2^n}{4(1-n)2^n} \qquad a_0 = 3$

- H : $a_{n+1} = 4a_n \Rightarrow \boxed{a_{n_H} = 4^n k_1}$
- P : $a_n = k_2 2^n + k_3 n 2^n$

$a_{n+1} - 4a_n = 4.2^n - 4n2^n$

$k_2 2^{n+1} + k_3(n+1)\underbrace{2^{n+1}}_{2.2^n} - 4(k_2 2^n + k_3 n 2^n) = 2^n(4 - 4n)$

$2k_2 2^n + 2k_3 n 2^n + 2k_3 2^n - 4k_2 2^n - 4k_3 n 2^n = 2^n(4 - 4n)$

$\cancel{2^n}(2k_2 + 2k_3 n + 2k_3 - 4k_2 - 4k_3 n) = \cancel{2^n}(4 - 4n)$

$n(\underbrace{2k_3 - 4k_3}_{-4}) + (\underbrace{2k_2 + 2k_3 - 4k_2}_{2k_3 - 2k_2 = 4}) = -4n + 4$

$\boxed{k_3 = 2} \qquad \boxed{k_2 = 0} \qquad \boxed{a_{n_P} = 2n2^n}$

- G = $\boxed{a_{n_G} = k_1 4^n + 2n2^n}$
- VI : $a_0 = \boxed{3 = k_1} \qquad \boxed{a_n = 3.4^n + 2n2^n}$ ✓

(13) Resuelva los sig. relaciones de recurrencia lineal no homogénea de orden 2:

a) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$ $\qquad a_0 = 0 \qquad a_1 = 1$

• H: $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \qquad r_2 = -2$

$$\boxed{a_{nH} = k_1(-1)^n + k_2(-2)^n}$$

• P: $a_n = k_3 3^n$

$$a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n$$

$$k_3 3^{n+2} + 3k_3 3^{n+1} + 2 \cdot k_3 3^n = 3^n$$

$$\cancel{3^n}(9k_3 + 9k_3 + 2k_3) = \cancel{3^n} \Rightarrow k_3 = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{a_{np} = \frac{3^n}{20}}$$

• G: $\boxed{a_{nG} = k_1(-1)^n + k_2(-2)^n + \frac{3^n}{20}}$

• V.I: $a_0 = 0 = k_1 + k_2 + \frac{1}{20} \rightsquigarrow k_1 + k_2 = \frac{-1}{20}$

$a_1 = 1 = -k_1 - 2k_2 + \frac{3}{20} \qquad -k_1 - 2k_2 = \frac{17}{20}$

$\Rightarrow k_1 = \frac{3}{4} \qquad k_2 = -\frac{4}{5}$

$$\boxed{a_n = \frac{3}{4}(-1)^n - \frac{4}{5}(-2)^n + \frac{3^n}{20}}$$ ✓

b) $a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 7$ $\qquad a_0 = 1 \qquad a_1 = 2$

• H: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2} = -2 \Rightarrow \boxed{a_{nH} = k_1(-2)^n + k_2 n(-2)^n}$

• P: $a_{np} = k_3 = a_{n+1} = a_{n+2}$

→ $k_3 + 4k_3 + 4k_3 = 7 \Rightarrow k_3 = \frac{7}{9} \Rightarrow \boxed{a_{np} = \frac{7}{9}}$

• G: $\boxed{a_{nG} = k_1(-2)^n + k_2 n(-2)^n + \frac{7}{9}}$

• V.I: $a_0 = 1 = k_1 + \frac{7}{9}$

$a_1 = 2 = -2k_1 - 2k_2 + \frac{7}{9}$

$k_1 = \frac{2}{9} \qquad k_2 = -\frac{5}{6}$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}n(-2)^n + \frac{7}{9}}$$ ✓

c) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4.3^n$ $\quad a_0 = 4 \quad a_1 = 14$

• <u>H</u>: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{nH} = k_1 2^n + k_2 n 2^n}$

• <u>P</u>: $\boxed{a_n = k_3 3^n}$

• $k_3 3^{n+2} - 4k_3 3^{n+1} + 4k_3 3^n = 4 \times 3^n$

$\cancel{3^n}(\underbrace{9k_3 - 12k_3 + 4k_3}) = 4.\cancel{3^n}$

$\boxed{k_3 = 4}$ $\quad \boxed{a_{nP} = 4.3^n}$

• <u>G</u>: $\boxed{a_{nG} = k_1 2^n + k_2 n 2^n + 4.3^n}$

• <u>V.I</u>: $a_0 = 4 = k_1 + 4 \Rightarrow \boxed{k_1 = 0}$

$a_1 = 14 = 2k_1 + 2k_2 + 12 \Rightarrow \boxed{k_2 = 1}$

$$\boxed{a_n = n2^n + 4.3^n}$$

d) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 5.2^n$ $\quad a_0 = 5 \quad a_1 = 13$

• <u>H</u>: $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 3 \Rightarrow \boxed{a_{nH} = k_1 3^n + k_2 n 3^n}$

• <u>P</u>: $a_n = k_3 2^n$

• $k_3 2^{n+2} - 6k_3 2^{n+1} + 9k_3 2^n = 5.2^n$

$2^n(\underbrace{4k_3 - 12k_3 + 9k_3}) = 5.2^n$

$k_3 = 5$ $\quad \boxed{a_{nP} = 5.2^n}$

• <u>G</u>: $\boxed{a_{nG} = k_1 3^n + k_2 n 3^n + 5.2^n}$

• <u>VI</u>: $a_0 = 5 = k_1 + 5 \Rightarrow \boxed{k_1 = 0}$

$a_1 = 13 = 3k_1 + 3k_2 + 10 \Rightarrow \boxed{k_2 = 1}$

$$\boxed{a_n = n3^n + 5.2^n}$$

e) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4^{n+1}$ $\qquad a_0 = 1 \quad a_1 = 10$

- $\underline{H}$: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 2 \Rightarrow \boxed{a_{nH} = k_1 2^n + k_2 n 2^n}$
- $\underline{P}$: $a_n = k_3 4^n$

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 4^{n+1}$$
$$k_3 4^{n+2} - 4k_3 4^{n+1} + 4 \cdot k_3 4^n = 4 \cdot 4^n$$
$$\cancel{4^n}(16k_3 - 16k_3 + 4k_3) = 4 \cdot \cancel{4^n} \Rightarrow k_3 = 1 \Rightarrow \boxed{a_{np} = 4^n}$$

- $\underline{G}$: $\boxed{a_{nG} = k_1 2^n + k_2 n 2^n + 4^n}$

- $\underline{VI}$: $a_0 = 1 = k_1 + 1 \Rightarrow \boxed{k_1 = 0}$

$a_1 = 10 = 2k_1 + 2k_2 + 4 \Rightarrow \boxed{k_2 = 3}$

$$\boxed{a_n = 3n2^n + 4^n}$$

✓

f) $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 3a_n = 24 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n$ $\qquad a_0 = 1 \quad a_1 = 11$

- $\underline{H}$: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow r_1 = 3, \ r_2 = -1 \Rightarrow \boxed{a_{nH} = k_1 3^n + k_2 (-1)^n}$
- $\underline{P}$: $a_n = k_3 n 3^n + k_4 5^n$

3^n está en a_{nH}, por eso agrego n

$$a_{n+2} \quad -2a_{n+1} \quad -3a_n$$
$$k_3(n+2)3^{n+2} + k_4 5^{n+2} - 2k_3(n+1)3^{n+1} - 2k_4 5^{n+1} - 3k_3 n 3^n - 3k_4 5^n =$$
$$= 24 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n =$$
$$= 3^n(9k_3 n + 18k_3 - 6k_3 n - 6k_3 - 3k_3 n) + 5^n(25k_4 - 10k_4 - 3k_4) =$$
$$= 3^n(n(\underbrace{\cancel{9k_3 - 6k_3 - 3k_3}}_{0}) + (\underbrace{18k_3 - 6k_3}_{12k_3 = 24})) + 5^n(\underbrace{12k_4}_{12}) = 24 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n$$

$12k_3 = 24$ $\qquad 12 \Rightarrow \boxed{k_4 = 1}$

$\boxed{k_3 = 2}$

$$\boxed{a_{n_p} = k_1 3^n + k_2(-1)^n + 2n3^n + 5^n}$$

- $\underline{VI}$: $a_0 = 1 = k_1 + k_2 + 1 \Rightarrow k_1 = -k_2$

$a_1 = 11 = 3k_1 - k_2 + 6 + 5 \Rightarrow 3k_1 - k_2 = 0$ $\Big\} \ \boxed{k_1 = k_2 = 0}$

$$\boxed{a_n = 2n3^n + 5^n}$$

✓